Билет 1)

*Определитель порядка n. Свойства определителя. Вычисление методом Гаусса.*

**Опр**:Некоторое число, заданное формулой:

Называется определителем матрицы:

Где:

**Свойства определителя**:

1. Пусть . Тогда|A| = 0

Следствие 1: Определитель, содержащий две пропорциональные строки = 0

Следствие 2:Определитель, строка которого есть лин. комбинации других строк = 0

1. Пусть . Тогда**:**
2. Определитель **треугольной матрицы** равен произведению элементов **главной** диагонали.
3. Определитель не меняется при добавлении к его строке произвольной лин. комбинации других строк.

**Метода Гаусса** *–* метод вычисления определителей, основанный на вышеописанных свойствах определителя. Основная идея заключается в том, чтобы привести квадратную матрицу к треугольному виду, используя следующие преобразования:

1. Перестановка строк
2. Умножение строки на ненулевое число
3. Прибавление к данной строке линейной комбинации других строк.

**Доказательства свойств 3, 5**:

3)

Пусть существует определитель матрицы . Запишем её определитель:

Заметим, что каждый элемент такой суммы будет включать в себя по компоненту из каждой строки => В каждом слагаемом будет множитель = 0 => Сама сумма = 0.

5)

Пусть . Тогда**:**

Рассмотрим такой определитель, равный 0:

Билет 2)

*Правило Крамера*

**Теорема**: Критерий определённости системы (матрицы).

В стандартных обозначениях матрица имеет вид:

Система является определённой тогда и только тогда, когда её определитель не равен 0

**Доказательство**:

Обозначим через матрицу ступенчатого вида, полученную путём прямого хода метода Гаусса. Тогда, по свойствам определителя

.

Пусть r – число ступеней матрицы . Система является определённой тогда и только тогда, когда r = n

(число ступеней равно числу столбцов, которое равно числу строк в определителе).

Т.е. должно выполняться свойство определителя . Теорема доказана.

**Следствия**:

1. Однородная система () имеет ненулевое решение .
2. ⬄ строки и столбцы в образуют линейно зависимую систему. Т.е. 1 из строк или 1 из столбцов есть линейная комбинация остальных.

**Правило Крамера**:

Пусть , тогда единственное решение системы имеет вид:

Где – определитель, который получается заменой – го столбца на столбец (столбец свободных членов).

**Доказательство**:

Пусть – единственное решение системы (в силу теоремы 1). Зафиксируем Тогда имеем: (т.к. определитель аддитивная функция столбцов)

Выделены -е столбцы, остальные, как в d. Заметим, что система зависит от .

При определитель имеет пропорциональные столбцы, следовательно

Откуда следует Теорема доказана.

Наконец, отметим, что решение системы с помощью определителей (в случае ) имеет на порядок большую трудоёмкость, чем метод Гаусса. Если все определители , считаются приведением к треугольному виду, то трудоёмкость метода Крамера составляет операций (по сравнению с для метода Гаусса).

Вопрос 3)

*Разложение определителя по строке (столбцу)*

**Теорема о разложении определителя по строке (столбцу)**.

Пусть , тогда – алгебраическое дополнение к элементу . При любом имеет место равенство (разложение определителя по -й строке)

Тоже самое выполняется и для столбцов.

**Доказательство**:

Представим -ю строку в виде

Определитель – аддитивная функция строк поэтому

В каждом из определителей выделена -я строка. Остальные строки – такие, как в A. Убедимся, что . Преобразуем , с помощью перестановок к виду:

– матрица, полученная из A путём вычёркивания -й строки и j-го столбца. Применяя лемму об определителе с нулевым углом, приходим к равенству:

Теорема доказана.

**Следствие**:

Если , то .

Обобщение следствия и теоремы:

– разложение по -ой строке

– разложение по j-му столбцу

– символ Кронекера.

**Теорема Лапласа.** Пусть в определителе порядка n выделены строк (столбцов), Определитель равен сумме произведений всех миноров -го порядка, содержащихся в этих строках (столбцах), на их алгебраические дополнения.

Изображение выглядит как текст, Шрифт, диаграмма, линия

Контент, сгенерированный ИИ, может содержать ошибки.

Билет 4)

*Обратная матрица. Теорема об обратной матрице. Способы вычисления А-1*

**Опр:** Матрица A-1, для которой выполнены равенства

AA-1 = A-1A = E

называется обратной к матрице . Матрица , для которой существует обратная, называется обратимой.

**Теорема:** Матрица A является обратимой тогда и только тогда, когда эта матрица является невырожденной. (неособенной, несингуляpной) т.е. |A| 0. Если |A| 0, то

(\*)

где := (Aij) – матрица алгебраических дополнений к элементам матрицы A.

**Доказательство:**

Пусть А обратима. Из определения A-1 и теоремы об определителе произведения матриц следует, что

Это гарантирует не вырожденность матрицы А и равенство:

Пусть А невырожденная. B – матрица из правой части уравнения (\*), убедимся, что AB = BA = E.

Проверка на примере AB = E:

Пусть C = AB. Тогда по результатам пункта о разложении определителя ()

Значит, C = () = E.

Таким образом, установлены и обратимость A, и формула (\*). Теорема доказана.

**Способы вычисления А-1**:

1. Метод Гаусса вычисления A-1. Компактная запись имеет вид:
2. Метод нахождения через присоединённую матрицу

где – матрица алгебраических дополнений.