Билет 1)

*Определитель порядка n. Свойства определителя. Вычисление методом Гаусса.*

**Опр**:Некоторое число, заданное формулой:

Называется определителем матрицы:

Где:

**Свойства определителя**:

1. Пусть . Тогда|A| = 0

Следствие 1: Определитель, содержащий две пропорциональные строки = 0

Следствие 2:Определитель, строка которого есть лин. комбинации других строк = 0

1. Пусть . Тогда**:**
2. Определитель **треугольной матрицы** равен произведению элементов **главной** диагонали.
3. Определитель не меняется при добавлении к его строке произвольной лин. комбинации других строк.

**Метода Гаусса** *–* метод вычисления определителей, основанный на вышеописанных свойствах определителя. Основная идея заключается в том, чтобы привести квадратную матрицу к треугольному виду, используя следующие преобразования:

1. Перестановка строк
2. Умножение строки на ненулевое число
3. Прибавление к данной строке линейной комбинации других строк.

**Доказательства свойств 3, 5**:

3)

Пусть существует определитель матрицы . Запишем её определитель:

Заметим, что каждый элемент такой суммы будет включать в себя по компоненту из каждой строки => В каждом слагаемом будет множитель = 0 => Сама сумма = 0.

5)

Пусть . Тогда**:**

Рассмотрим такой определитель, равный 0:

Билет 2)

*Правило Крамера*

**Теорема**: Критерий определённости системы (матрицы).

В стандартных обозначениях матрица имеет вид:

Система является определённой тогда и только тогда, когда её определитель не равен 0

**Доказательство**:

Обозначим через матрицу ступенчатого вида, полученную путём прямого хода метода Гаусса. Тогда, по свойствам определителя

.

Пусть r – число ступеней матрицы . Система является определённой тогда и только тогда, когда r = n

(число ступеней равно числу столбцов, которое равно числу строк в определителе).

Т. е. должно выполняться свойство определителя . Теорема доказана.

**Следствия**:

1. Однородная система () имеет ненулевое решение .
2. ⬄ строки и столбцы в образуют линейно зависимую систему. Т. е. 1 из строк или 1 из столбцов есть линейная комбинация остальных.

**Правило Крамера**:

Пусть , тогда единственное решение системы имеет вид:

Где – определитель, который получается заменой – го столбца на столбец (столбец свободных членов).

**Доказательство**:

Пусть – единственное решение системы (в силу теоремы 1). Зафиксируем Тогда имеем: (т. к. определитель аддитивная функция столбцов)

Выделены -е столбцы, остальные, как в d. Заметим, что система зависит от .

При определитель имеет пропорциональные столбцы, следовательно

Откуда следует Теорема доказана.

Наконец, отметим, что решение системы с помощью определителей (в случае ) имеет на порядок большую трудоёмкость, чем метод Гаусса. Если все определители , считаются приведением к треугольному виду, то трудоёмкость метода Крамера составляет операций (по сравнению с для метода Гаусса).

Вопрос 3)

*Разложение определителя по строке (столбцу)*

**Теорема о разложении определителя по строке (столбцу)**.

Пусть , тогда – алгебраическое дополнение к элементу . При любом имеет место равенство (разложение определителя по -й строке)

То же самое выполняется и для столбцов.

**Доказательство**:

Представим -ю строку в виде

Определитель – аддитивная функция строк поэтому

В каждом из определителей выделена -я строка. Остальные строки – такие, как в A. Убедимся, что . Преобразуем , с помощью перестановок к виду:

– матрица, полученная из A путём вычёркивания -й строки и j-го столбца. Применяя лемму об определителе с нулевым углом, приходим к равенству:

Теорема доказана.

**Следствие**:

Если , то .

Обобщение следствия и теоремы:

– разложение по -ой строке

– разложение по j-му столбцу

– символ Кронекера.

**Теорема Лапласа.** Пусть в определителе порядка n выделены строк (столбцов), Определитель равен сумме произведений всех миноров -го порядка, содержащихся в этих строках (столбцах), на их алгебраические дополнения.

Изображение выглядит как текст, Шрифт, диаграмма, линия

Контент, сгенерированный ИИ, может содержать ошибки.

Билет 4)

*Обратная матрица. Теорема об обратной матрице. Способы вычисления А-1*

**Опр:** Матрица A-1, для которой выполнены равенства

AA-1 = A-1A = E

называется обратной к матрице . Матрица , для которой существует обратная, называется обратимой.

**Теорема:** Матрица A является обратимой тогда и только тогда, когда эта матрица является невырожденной. (неособенной, несингуляpной) т. е. |A| 0. Если |A| 0, то

(\*)

где := (Aij) – матрица алгебраических дополнений к элементам матрицы A.

**Доказательство:**

Пусть А обратима. Из определения A-1 и теоремы об определителе произведения матриц следует, что

Это гарантирует не вырожденность матрицы А и равенство:

Пусть А невырожденная. B – матрица из правой части уравнения (\*), убедимся, что AB = BA = E.

Проверка на примере AB = E:

Пусть C = AB. Тогда по результатам пункта о разложении определителя ()

Значит, C = () = E.

Таким образом, установлены и обратимость A, и формула (\*). Теорема доказана.

**Способы вычисления А-1**:

1. Метод Гаусса вычисления A-1. Компактная запись имеет вид:
2. Метод нахождения через присоединённую матрицу

где – матрица алгебраических дополнений.

Билет 5)

*Многочлены и действия с ними. Теорема о делении с остатком.*

**Определение 1:** *Многочленом над F* (где F – поле R или поле C) *называется выражение вида*

(1)

Числа ai называются коэффициентами Максимальное , для которого , называется степенью и обозначается . Многочлены равные, если равны все коэффициенты.

Совокупность всех таких многочленов обозначается через

**Определение 2:** Многочленом называется бесконечный набор

(2)

Чисел ai, принадлежащих , в котором все ai, начиная с некоторого, равны 0. Два набора, у которых все соответствующие компоненты совпадают, называются равными.

В частности, тогда и только тогда, когда все .

Соответствие между записями 1 и 2 очевидно:

**Действия с многочленами:** *f* = () *и g* = ()

Сложение:

Умножение: *,* где*=*

**Теорема 1**. Совокупность относительно операций 1–2 образует ассоциативное коммутативное кольцо с единицей, не имеющее делителей нуля, то есть целостное кольцо.

**Доказательство**: Коммутативность сложения и умножения в F[x] следует из симметричного вида и относительно и . Нулевой элемент это нуль многочлен . Очевидно, для противоположным является . Единицей в будет многочлен

, обозначаемый просто 1. Ясно, что

Ассоциативность сложения, ассоциативность умножения и дистрибутивность вытекают из следующих числовых равенств:

Обозначим . Соотношение (1) означает, что совпадают компоненты многочленов пpи произвольном ; поэтому

Аналогично, (2) и (3) эквивалентны соответственно

Покажем, наконец, что не имеет делителей нуля, то есть таких многочленов и , одновременно не равных 0, что . Пусть ; и первые ненулевые компоненты и . Тогда

В правом наборе есть компонента с номером . Это означает, что если , то обязательно или . Теоpема доказана.

**Теорема 2.** Для любых

Доказательство сразу получается из определения операций 1–2.

**Теорема (о делении с остатком):** пусть Существует единственный и единственный такие, что

(1)

**Доказательство:**

**Существование**.

Степени многочленов обозначим через и соответственно. Докажем сначала, что требуемые многочлены и существуют. Удобно многочлен зафиксировать, а многочлену разрешить изменяться произвольным образом.

1. Если, то

откуда видно, что

1. Пусть . Считая, что многочлены и записаны по убыванию степеней, обозначим через *,*  их старшие коэффициенты.

Применим для доказательства существования многочленов и метод математической индукции. При положим

(2)

Поскольку степени многочленов и  равны между собой, а их старшие коэффициенты совпадают, получаем, что . Если из равенства (2) выразить многочлен *f(x)*, то станет понятно, что частное равно *,* а остаток равен *r(x)*.

1. Пусть . Предположим, что для любого многочлена степени, меньшей *n*, частное и остаток от деления на существуют. Рассмотрим многочлен

(3)

Нетрудно понять, что ; поэтому к многочлену применимо предположение индукции. Следовательно, найдутся такие многочлены и *,* что

(4)

Из равенств (3) и (4) легко получить, что

Таким образом, существование частного и остатка от деления на доказано.

**Единственность**.

Предположим, что для пары выполнено . Тогда , то есть . По теоpеме 2 мы приходим к равенству

Это соотношение выполняется лишь в ситуации тогда оно имеет вид . Если же или , то соотношение неверно, так как . Это устанавливает единственность *q* и *r*. Теорема полностью доказана.

Билет 6)

*НОД двух многочленов. Алгоритм Евклида.*

**Определение 1.** Пусть многочлен, для которого выполнены одновременно следующие два условия:

Такой многочлен называется наибольшим общим делителем (НОД) и . Обозначение

**Теорема 1.** Пусть НОД многочленов и существует. Тогда нормированный НОД этих многочленов является единственным.

**Доказательство**.Если , два нормированных НОД и . Тогда по определению и . По свойству предыдущего пункта , . Так как старшие коэффициенты и равно 1, то , то есть , что и требовалось доказать.

**Свойства НОД:**

**Теорема 2.** Для любых двух ненулевых многочленов их НОД существует.

**Доказательство** (Через алгоритм Евклида).

Пусть . Построим конечные последовательности многочленов ri и qi по следующему правилу:

r1:= f, r0 := g; если ri = 0, то qi и ri+1 есть соответственно частное и остаток пpи делении ri-1 на ri, i = 0, 1, ....

Иными словами:

(\*)

Покажем, что этот пpоцесс обрывается на некотоpом шаге, когда очередное новое значение остатка принимает значение rn+1 = 0. По построению Так как степени остатков строго убывают, то на некотоpом шаге равенство (\*) соответствует делению нацело в крайнем случае мы дойдём до ситуации deg rn = 0, тогда очередной остаток rn+1 равен нулю. Пусть rn последний не равный нулю остаток. Тогда rn является наибольшим общим делителем и .

Для обоснования рассмотрим подробную запись алгоритма *(алгоритма Евклида)*:

(~)

Поднимаясь снизу вверх, мы получаем последовательно, что rn | rn-1, rn | rn-2, rn | rn-3, ..., rn | r1, rn | g, rn | f, то есть rn является общим делителем f, g. Пусть теперь некоторый многочлен ϕ делит f и g. Тогда, опускаясь в (~) сверху вниз (до предпоследнего соотношения), имеем: ϕ | r1, ϕ | r2, ϕ | r3, ..., ϕ | rn-1, ϕ | rn. Таким образом, rn есть наибольший из всех общих делителей f, g. Пpи обосновании мы воспользовались простым свойством делимости: если два элемента равенства (~) делятся на некоторый многочлен, то на него делится и третий элемент. Итак, rn = (f, g). Фактически мы доказали последовательность соотношений (f, g) = (g, r1) = (r1, r2) = ... = (rn-1, rn) = rn.

**Следствие 1**: Для любых ненулевых существуют такие, что

(1)

Если дополнительно , , то многочлены u, v можно выбрать так, чтобы было , .

**Доказательство:** Из (1) и цепочки алгоритма Евклида следует, что

мы положили u1 := 1, v1 := -qn (в обозначениях из доказательства теоремы 2). Выражая из предыдущего равенства rn-1 через rn-2 и rn-3, получим

u2 := v1, v1 := u1 − v1 qn-1, и т.д. В конце концов мы придём к представлению

совпадающему с (1).

**Определение 2**. Многочлены для которых , называются взаимно простыми.

**Следствие 2.** Многочлены являются взаимно простыми тогда и только тогда, когда существуют многочлены , для которых

**Доказательство.** Пусть взаимно просты. Тогда (, и по первому следствию для некоторых Пусть, наоборот, имеет место . Тогда делит 1, то есть является многочленом нулевой степени. Если ϕ нормирован, то ϕ = 1. В случае F = R это представление для взаимно простых многочленов доказано Э. Безу. Из следствия 2 получаются некоторые важные свойства, которые мы объединим в одно утверждение.

**Следствие 3.**

**Доказательство**.

(1). По предыдущему следствию, для некоторых u, v имеет место . Умножим это равенство на ψ:

Каждый общий делитель f и ψϕ является и делителем ψ, то есть общим делителем для f и ψ. Так как (f, ψ) = 1, то таковых последних, отличных от многочленов нулевой степени, нет. Поэтому . (2).

Умножим равенство на :

Так как ϕ делит оба слагаемых левой части, то ϕ делит и правую часть.

(3). По условию, f = ϕh = ψh1. Поэтому ψ | ϕh. Так как (ϕ, ψ) = 1, то по предыдущему свойству ψ | h. Тогда ϕψ | f.

PS: Результаты этого пункта являются справедливыми для так на зеваемых евклидовых колец многочленов, то есть целостных колец, в которых определено деление с остатком.

Билет 7)

*Неприводимые многочлены. Разложение в произведение неприводимых.*

*Неприводимые многочлены над R и над С.*

**Определение**:

Иными словами. Неприводимый многочлен – многочлен, который нельзя представить в виде произведения других неприводимых многочленов. При этом всём, многочлен не является константой .

**Теорема 1***.* Пусть:Тогда:

**Теорема 2**.

Существует единственное разложение на произведение некоторой константы “c” и конечного числа неприводимых нормированных многочленов. (нормированный многочлен – многочлен старший коэффициент которого = 1)

**Теорема 3**. Пусть: Тогда:. Иначе говоря, все многочлен, степень которых = 1, являются неприводимыми над C и R. Многочлены, степень которых = 2, остаются неприводимыми над R, если их дискриминант = 0

**Доказательство теоремы 1**.Значит две эти ситуации действительно возможны только по отдельности.

Билет 8)

*Корень многочлена. Кратные корни и дифференцирование. Основная теорема алгебры.*

**Корнем многочлена** , при подстановке которого многочлен обращается в 0. ,

**Корнем кратности k многочлена**

Корень кратности называется простым, а корень кратности - кратным.

**Производной многочлена**

**Свойства Дифференцирования**:

**Теорема 1.**   *.*

**Теорема 2.** Пусть *c* является корнем кратности*k* многочлена . Тогда *с* является корнем кратности *k − 1* производной *f ′*

**Теорема 3.**  *, .*

**Теорема 4.**

**Теорема 5.**

**Следствие 1*:*** Каждый многочлен степени n ≥ 1 с действительными коэффициентами имеет k действительный корней (k ≤ n) с учётом кратности.

**Следствие 2*:*** Два многочлена равны тогда и только тогда, когда они совпадают как функции .

**Док-во теоремы 3*.***

Билет 9).

*Задача интерполяции многочленами. Существование и единственность интерполяционного многочлена. Формулы Лагранжа и Ньютона.*

**Задача интерполяции многочленами**: существует единственный многочлен f степени ⩽ n такой, что выполнены равенства

**Доказательство:** Полагая перепишем соотношения в виде системы линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов aк с квадратной матрицей порядка n+1:

Определитель матрицы системы равен ; он отличен от 0, так как Поэтому система, а значит, и задача интерполяции имеет единственное решение. Явный вид многочлена f можно получить, решая эту систему. Однако чаще пользуются следующей интерполяционной формулой Лагранжа.

Многочлены Лагранжа Li ∈ F[x] обладают важными свойствами:

отсюда следует

**Интерполяционная формула Лагранжа**:

**Интерполяционная формула Ньютона**:

u0, …, un – разделённые разности.

Билет 11)

*Лемма о двух системах векторов. Базис, размерность, координаты. Понятие о бесконечномерных пространствах.*

**Лема о двух системах векторов**.

Пусть и две системы векторов (линейное пространство), причём вторая система линейно независима и для всех Тогда . Иными словами, среди линейных комбинаций данных векторов может быть не более линейно независимых.

**Базис**.Конечная совокупность векторов называется базисом тогда и только тогда, когда выполнены два условия:

1. система линейно независима;
2. .

Второе условие означает в точности, что каждый вектор x ∈ L есть линейная комбинация элементов базиса: .

**Размерность** – число элементов базиса. Если , то говорят также, что пространство является n-мерным.

**Координаты**.Числа из называются координатами вектора в базисе .

**Бесконечномерные пространства**.Определение.

* Бесконечная система векторов линейного пространства L на зевается линейно независимой, если любая её конечная подсистема линейно независима.
* Линейное пространство, в котором есть бесконечная линейно независимая система, называется бесконечномерным.
* Пространство, в котором нет ни одной бесконечной линейно независимой системы, называется конечномерным.

**Теорема**. Пусть линейное пространство является конечномерным. Тогда число (максимальное число линейно независимых элементов ) существует.

**Доказательство**. По условию в найдётся ненулевой вектор . Если все системы вида линейно зависимы, то, . В противном случае найдётся линейно независимая система . Если все системы линейно зависимы, то . Продолжая этот процесс, построим такую линейно независимую систему , что все системы вида линейно зависимы. В соответствии со свойством линейной зависимости это означает, что каждый вектор есть линейная комбинация векторов , то есть . Процесс построения такой цепочки линейно независимых векторов обязательно оборвётся, иначе в найдётся бесконечная линейно независимая система Покажем, что число векторов в построенной системе не зависит от способа выбора линейно независимых векторов. Пусть наряду с системой описанным методом построена линейно независимая система . Тогда, как отмечалось, при всех и

Применяя дважды лемму предыдущего пункта о двух системах векторов, мы получим, что одновременно и . Это означает, что . Теорема доказана.

**Замечание**. Отметим ещё раз, что если — любая линейно независимая система с числом векторов , то обязательно . В конечномерном пространстве система с такими свойствами, как мы показали, обязательно существует.

**Теорема 1**.Если в существует базис, то любые два базиса имеют одинаковое количество элементов. Далее, коэффициенты разложения вектора по данному базису (то есть числа определяются единственным образом.

**Доказательство**.

1. Пусть существует два базиса и . Применяя лемму о двух системах в двух направлениях, получим и => .
2. Единственность координат (6 свойство линейной зависимости)

**Теорема 2**. – конечномерное обладает базисом или .

**Следствие**: любое бесконечномерное пространство не имеет базиса.

**Доказательство**.

. Пусть — конечномерное пространство. Если , то существует такая конечная линейно независимая система, которая даёт в линейной оболочке всё , — иными словами, существует базис .

. Если в существует базис, то обязательно конечномерно: число элементов любой линейно независимой системы не превосходит dim . Это сразу следует из леммы о двух системах векторов.

Конечномерность пространства отмечалась в предыдущем пункте. Теорема доказана.

**Примеры:**

1. – конечномерное
2. – конечномерное
3. – бесконечномерное (
4. – бесконечномерное

**Теорема 3**. Пусть обладает базисом. Тогда произвольная линейно независимая система может быть дополнена до базиса.

Билет 21)

*Длина и угол в евклидовом пространстве. Неравенство Коши – Буняковского.*

– Длина вектора (также называется нормой)

Каноническая длина вектора в , , связана со стандартным скалярным произведением и равна

**Свойства**:

**Теорема Пифагора**.

**Равенство параллелограмма**.

Угол между векторами определяется соотношением

**Теорема (неравенство Коши-Буняковского)**. Для любых векторов выполняется неравенство

Равенство в выше имеет место только для коллинеарных (различающихся скалярным множителем). Часто используется следующая эквивалентная форма:

Доказательство. Если , неравенства выше обращаются в равенство. Зафиксируем пару . Рассмотрим функцию , определённую равенством

Из четвёртого свойства скалярного произведения следует, что при всех действительных . В связи с этим дискриминант должен быть неположительным:

что эквивалентно неравенству выше. Подстановка или приводит к совпадению обеих частей первого неравенства. Покажем, что иных ситуаций равенства нет. Если в если в первом неравенстве имеет место равенство и , то обязательно . Поэтому для некоторого . Это означает, что

то есть . Теорема доказана.

**Частные виды неравенства**.

1. Для пространства , неравенство эквивалентно и не даёт ничего нового.
2. Для с каноническим скалярным произведением соотношение записывается как (доказано Коши)
3. Пусть – непрерывные функции. Пользуясь интегральным скалярным произведением, получаем:

Билет 22)

*Ортогональный и ортонормированный базисы в евклидовом пространстве. Преимущества ортонормированного базиса. Ортогонализация Грама – Шмидта.*

Пусть — евклидово пространство размерности .

**Определение**. Базис называется ортогональным, если , , и ортонормированным, если дополнительно , . Другими словами, ортонормированный базис определяется соотношением

Ортонормированный базис может быть получен из ортогонального базиса с помощью простой процедуры нормировки:

**Теорема 1**. Пусть — некоторый ортонормированный базис, , — произвольные векторы (их координаты соответствуют базису ). Имеют место следующие равенства.

1. , . Таким образом, для выполняется тождество
2. .
3. .
4. Если , — угол между , то

**Доказательство**.

1. Скалярно умножим на равенство

Используем свойства скалярного произведения и равенства. Мы получим, что .

1. Опять с учётом того же свойства имеем:
2. По определению, . Остаётся воспользоваться 2), заменив на .
3. сразу следует из предыдущего и равенства

Теорема доказана.

Таким образом, каждое из свойств 1) – 2) является *характеристическим свойством ортонормированного базиса*.

**Теорема 2 (Алгоритм Грама-Шмидта)**. Пусть произвольная линейно независимая система векторов . Существует такая ортогональная система , что , ,

**Следствие**. В конечномеpном евклидовом пространстве существуют ортогональный и ортонормированный базисы.

**Доказательство** следствия очевидно: надо применять алгоритм ортогонализации к произвольному базису E и затем нормировать векторы.